

COMITÉ NACIONAL ESPAÑOL DE GRANDES PRESAS

ESTUDIOS SOBRE EL COMPORTAMIENTO DE PRESAS DE ESCOLLERA ANTE VERTIDOS POR CORONACIÓN

Cristina Lechuga García¹; Ángel Lara Dominguez²; M^a Isabel Berga Cano³; M^a del Pilar Viña Gómez⁴; Miguel Ángel Toledo Municio⁵; Rafael Morán Moya⁶; Hibber Campos⁷; Jaime García Palacios⁸; Antonia Larese⁹

RESUMEN: Como consecuencia del desarrollo de un Proyecto de Investigación, el CEDEX, la Universidad Politécnica de Madrid y el CIMNE han trabajado conjuntamente en el desarrollo de un método para el estudio del proceso de rotura de presas de escollera por sobrevertido combinando técnicas de elementos finitos y partículas. Para ello se han realizado y analizado 80 ensayos en modelo físico en las instalaciones del CEDEX y UPM, utilizando seis tamaños de material, cuatro taludes distintos (1,5H:1V; 2,2H:1V; 3,0H:1V y 3,5H:1V) y tres opciones de impermeabilización (sin pantalla, núcleo interno y pantalla externa). Estos ensayos están permitiendo conocer mejor el fenómeno y calibrar el modelo matemático.

El modelo matemático basa su desarrollo en el acoplamiento de dos fenómenos: la filtración del agua en un medio granular (simulada mediante una malla euleriana) y la erosión del propio material granular (simulada mediante una malla lagrangiana).

Durante 2010 se prevé finalizar la construcción, en el CEDEX, de un canal de grandes dimensiones que permitirá ensayar presas de hasta 4 m de altura en condiciones de laboratorio, que servirán como prototipo para el análisis del efecto de escala. Este prototipo aumentará considerablemente la fiabilidad de las conclusiones obtenidas.

¹ CEDEX, cristina.lechuga@cedex.es

² CEDEX, angel.lara@cedex.es

³ CEDEX, m.isabel.berga@cedex.es

⁴ CEDEX, pilar.vina@cedex.es

⁵ UPM, matoleto@caminos.upm.es

⁶ UPM, rmoran@caminos.upm.es

⁷ UPM, hibber.campos@upm.es

⁸ UPM, jgpalacios@caminos.upm.es

⁹ CIMNE, antoldt@cimne.upc.edu

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVO

El CEDEX, la UPM y el CIMNE están trabajando conjuntamente desde el año 2007 en el estudio del modo en el que se produce la rotura de presas de escollera cuando se produce un vertido sobre su coronación. La forma de abordar el problema por las distintas instituciones es distinto: en el caso del CEDEX y UPM, mediante la realización de ensayos en modelo físico, en el del CIMNE, mediante el desarrollo de un modelo matemático.

El objetivo de esta comunicación es describir el estado de los estudios sobre el comportamiento de las presas de escollera ante vertidos por coronación durante la fase de inicio de la brecha, es decir, desde que se inicia el vertido sobre la coronación hasta el momento en que la rotura alcanza la coronación de la presa, así como exponer los trabajos que se prevén desarrollar en el futuro.

2. MODELACIÓN FÍSICA

Para el desarrollo de los ensayos en modelo físico se han utilizado las instalaciones disponibles en los laboratorios de hidráulica del Centro de Estudios Hidrográficos del CEDEX y de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos de la UPM. En concreto se han utilizado preferentemente tres canales:

- Canal pequeño (CEDEX): 0,40 m de anchura; 0,60 m de altura y 12,0 m de longitud.
- Canal mediano (CEDEX): 1,0 m de anchura; 1,1 m de altura y 16,0 m de longitud.
- Canal grande (UPM): 2,46 m de anchura; 1,3 m de altura y 13,5 m de longitud.

Los parámetros que se han modificado para obtener los resultados perseguidos son los siguientes:

- Tamaño de la escollera; 7, 8, 10, 12, 16 y 35 mm aproximadamente.
- Taludes aguas abajo: 1,5 - 2,2 - 3,0 - 3,5
- Tipo de impermeabilización:
 - Sin pantalla
 - Con pantalla impermeable en el paramento de aguas arriba
 - Con núcleo impermeable en el interior de la presa

La realización de ensayos en modelo físico se ha estructurado en tres campañas:

Campaña previa para comprobar las instalaciones y el efecto de la aleatoriedad. Dado que los ensayos se han realizado en diversas instalaciones, era necesario saber en qué medida serían comparables los resultados de ensayos de presas de la misma altura realizados en instalaciones de distinta anchura y con distintos sistemas de alimentación y control. Además, era preciso determinar si el mismo ensayo realizado varias veces en la misma instalación y en idénticas condiciones arrojaría resultados “similares”, es decir, conocer y acotar el efecto de la aleatoriedad. Ambos objetivos se cubrieron repitiendo un mismo ensayo tres veces en cada una de las instalaciones (canal mediano del CEDEX y recinto de ensayo de UPM), con 1 m de altura de presa.

Campaña general con ensayos de 1 m de altura de presa, control detallado y variación sistemática de los parámetros principales: talud de aguas abajo, tamaño de partícula y tipología de la pantalla.

Campaña específica para abordar los aspectos no esclarecidos en la campaña general, y que se consideraban importantes para un adecuado tratamiento del problema. Hasta el momento sólo ha sido posible estudiar la influencia del efecto de la escala y de la realización de ensayos de larga duración, si bien se prevé en el futuro realizar otras campañas para evaluar la influencia de las características del material (compactación, forma, tipo de granulometría,...), la anchura de la coronación, los hidrogramas de distintas avenidas, etc.

En todos los ensayos la aportación de agua se ha realizado mediante escalones de caudal constante hasta que el proceso de rotura en cada escalón se ha estabilizado.

En el CEDEX se han realizado 52 ensayos válidos, de los cuales 16 corresponden a la campaña previa, 25 a la general, y 11 a la específica. En 9 de los ensayos correspondientes a la campaña general se han obtenido datos de la geometría de la presa utilizando técnicas de fotogrametría clásica a partir de fotogramas obtenidos de cada escalón de caudal. En la UPM se han realizado, a su vez, 28 ensayos válidos. El resumen de ensayos realizados se puede consultar en la Tabla 1 .

Tabla 1 Campaña de ensayos UPM-CEDEX

Centro	Campaña	Material	Tipo de pantalla	Características	Canal
CEDEX	Previa	D ₅₀ = 17,33 mm	s	M=1,5 / N=1,5-2,2-3,0 / H=1,00 m	CM
			s	M=1,5 / N=1,5-2,2 / H=0,50 m	CP
UPM	Previa	D ₅₀ =16,49 mm	s	M=1,5 / N=2,2 / H=1,00 m	CG
		D ₅₀ =35,00 mm	s	M=1,5 / N=3 / H=1,00 m	CG
CEDEX	General	D ₅₀ = 7,36 mm	s	M=1,5 / N=1,5-2,2-3,0 / H=1,00 m	CM
			x	M=1,5 / N=1,5-2,2-3,0 / H=1,00 m	CM
			i	M=1,5 / N=1,5-2,2-3,0 / H=1,00 m	CM
CEDEX	General	D ₅₀ = 12,64 mm	s	M=1,5 / N=1,5-3,0 / H=1,00 m	CM
			x	M=1,5 / N=1,5-2,2-3,0 / H=1,00 m	CM
			i	M=1,5 / N=1,5 / H=1,00 m	CM
UPM	General	D ₅₀ =8,20 mm	s	M=1,5 / N=1,5-1,75-2,5-2,7 / H=0,60 m	CG
UPM	General	D ₅₀ =35 mm	s	M=1,5 / N=1,5-2,2-2,5-3,0 / H=1,00 m	CG
			x	M=1,5 / N=1,5-2,2-3,0 / H=1,00 m	CG
			i	M=1,5 / N=1,5-2,2-3,0 / H=1,00 m	CG
UPM	General	D ₅₀ =12,64 mm	s	M=1,5 / N=1,5-2,2-3,0 / H=1,00 m	CG
			x	M=1,5 / N=1,5-2,2-3,1 / H=1,00 m	CG
			i	M=1,5 / N=1,5-2,2-3,2 / H=1,00 m	CG
CEDEX / UPM	Efecto escala	D ₅₀ = 9,95 mm	x	M=1,5 / N=1,5-2,2-3,5 / H=0,23 m	CP
		D ₅₀ = 35,04 mm	x	M=1,5 / N=1,5-2,2-3,5 / H=0,80 m	CM
		D ₅₀ = 45,08 mm	x	M=1,5 / N=1,5-2,2-3,5 / H=1,03 m	CG'
CEDEX	Influencia tiempo	D ₅₀ = 7,36 mm	s	M=1,5 / N=3,0 / H=1,00 m	CM
			x	M=1,5 / N=3,0 / H=1,00 m	CM
UPM	Efecto Pared	D ₅₀ =16,49 mm	s	M=1,5 / N=3 / H=1,00 m	CG

s=sin elemento impermeable, x=con pantalla externa, i=con núcleo

M=Talud aguas arriba, N=Talud aguas abajo, H=Altura de presa

Los datos obtenidos, como norma general, de cada ensayo son: niveles de agua tanto aguas arriba como aguas abajo, presiones en la solera del canal, caudal aportado y la evolución de la rotura de la presa.



Figura 1 Canal pequeño (CEDEX)



Figura 2 Canal mediano (CEDEX)



Figura 3 Canal Grande (UPM)

3. MODELACIÓN MATEMÁTICA

El modelo matemático está siendo desarrollado en el CIMNE. El modelo trata el medio fluido y la presa de forma independiente y luego los acopla para simular los efectos de la erosión y el deslizamiento en masa que se pueden producir como consecuencia del paso del agua por el cuerpo de la presa durante el sobrevertido.

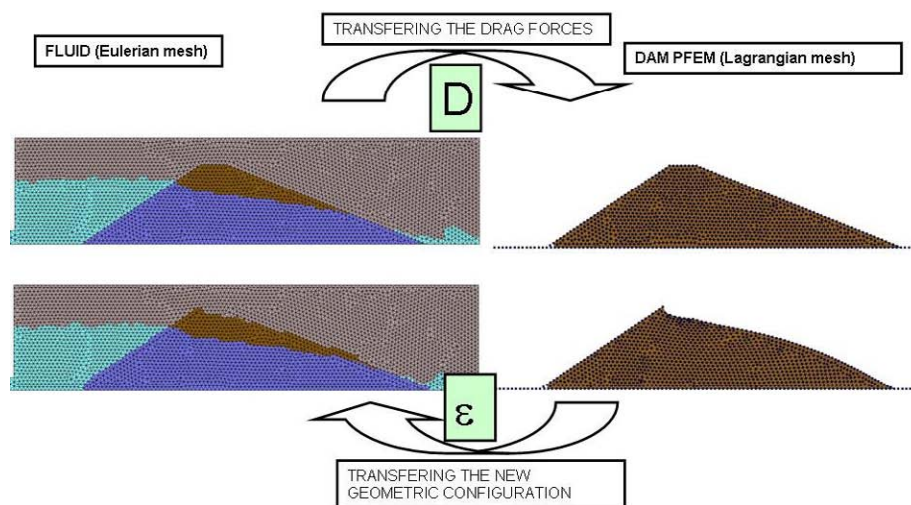


Figura 4 Esquema del método de cálculo

Como base de partida, el modelo considera tanto el agua como el cuerpo de presa como medios continuos. El objetivo no es simular cada partícula de material, sino estudiar la rotura a mayor escala. El modelo requiere una combinación de diferentes técnicas numéricas para simular adecuadamente el comportamiento del fluido tanto dentro como fuera del cuerpo de presa, así como los mecanismos de rotura de la presa. Para ello, combina técnicas avanzadas de elementos finitos y partículas en un único cálculo.

El movimiento del fluido: formulación euleriana

El comportamiento del fluido, tanto dentro del cuerpo de presa como fuera de él, se describe usando una modificación de las ecuaciones de Navier Stokes, insertando el término de Darcy en su forma no lineal (formulación de Ergun). Se parte de la hipótesis de fluido newtoniano. Esta formulación tiene la ventaja de que permite recuperar las ecuaciones clásicas de Navier Stokes cuando la porosidad es igual a 1 (es decir, cuando el fluido se encuentra fuera del cuerpo de presa). Para seguir el movimiento de la superficie libre, tanto dentro como fuera del medio poroso, se utiliza una función level-set.

La respuesta de la estructura: el método de partículas y elementos finitos (PFEM)

El estudio del comportamiento de la presa se ha realizado utilizando el PFEM, Método de Elementos Finitos y Partículas (Larese et al. (2008), Oñate et al (2000, 2003), Idelsohn et al. (2002), (2003), (2004)). Las características específicas de este método lo hacen apropiado para tratar el material de la presa, teniendo en cuenta que va a experimentar grandes deformaciones y cambios de forma durante el sobrevertido. Para tener en cuenta la posibilidad de deslizamiento en masa y la erosión, se utiliza una ley de viscosidad variable y un criterio energético de erosión. De hecho, estos son los dos mecanismos de rotura que se producen en la rotura por sobrevertido.

El modelo numérico se describe con mayor detalle en la comunicación “Metodología de análisis del comportamiento de presas de escollera frente a un sobrevertido” (A. Larese et al.), presentada en estas mismas jornadas.

4. RESULTADOS

El análisis de resultados se ha realizado mediante la representación en gráficos de los distintos parámetros implicados, para varios ensayos simultáneamente. En concreto se han representado las siguientes variables:

- Q/Q_r Vs. B/J (Camino de rotura)
- h_a/H Vs. B/J (Posición de la brecha)
- Q_r Vs. N (Caudal de rotura)
- h_a Vs. N (Nivel de agua aguas arriba en rotura)
- Q_r Vs. D_{50} (Variación del caudal de rotura con el D_{50})
- Q_r Vs. Q_i (Índice de fragilidad)

Siendo:

Q	Caudal en un determinado escalón o instante
Q_r	Caudal de rotura o mínimo caudal que lleva la rotura hasta el extremo de aguas abajo de la coronación de la presa
B	Avance total de la brecha desde el pie de aguas abajo
J	Proyección horizontal del talud de aguas abajo
N	Talud del paramento de aguas abajo
h_a	Nivel de agua aguas arriba
D_{50}	Diámetro medio del material
Q_i	Caudal de incubación o máximo caudal que no produce daños apreciables en la presa

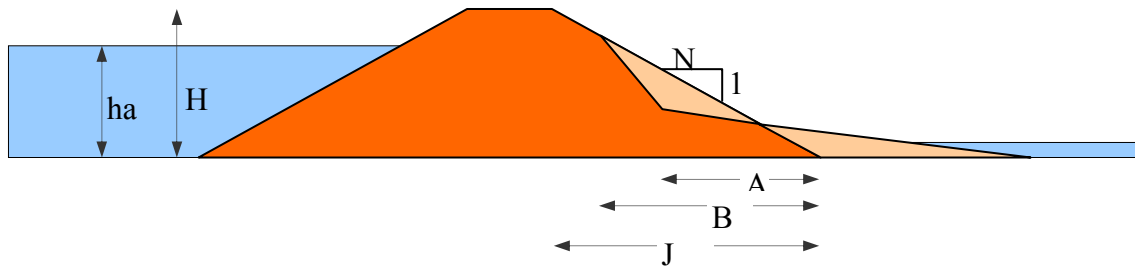


Figura 5 Esquema de rotura de una presa

5. CONCLUSIONES

A continuación se exponen, de manera sintética, las conclusiones que se han obtenido hasta el momento del análisis de los ensayos realizados tanto en las instalaciones de la UPM como del CEDEX. Estas conclusiones han de tomarse como preliminares en el sentido de que son aplicables a lo observado en los ensayos realizados en presas de hasta 1 m de altura en condiciones de laboratorio. La extrapolación de estas conclusiones a presas reales estará sujeta a la continuidad de los estudios para profundizar más en las variables que influyen en el fenómeno y en el efecto escala.

Se han analizado fundamentalmente los siguientes fenómenos:

- El efecto de la aleatoriedad
- El efecto escala
- Caudal de rotura
- Evolución de la rotura

Efecto de la aleatoriedad

- En los ensayos del CEDEX la aleatoriedad de los caminos de rotura es menor en la fase inicial que en los ensayos realizados en la UPM. Esto puede deberse al ancho del canal de ensayo de ambos laboratorios (1 m y 2,46 m respectivamente). La rotura en los ensayos de la UPM se produce inicialmente con varios canales de rotura y, a medida que avanza el ensayo la progresión se centra en uno sólo. Por el contrario, en los ensayos del CEDEX, generalmente sólo se abre una brecha.
- Parece que el efecto de la aleatoriedad es menor en taludes $N=1,5$ y $N=3,0$ y mayor para taludes intermedios. En un principio para taludes altamente inestables ($N=1,5$) resulta lógico que los caminos de rotura sean prácticamente iguales de un ensayo a otro.
- Sería necesario comprobar si esta aleatoriedad en los taludes intermedios es general. Para ello habría que realizar nuevos ensayos en los que se utilicen los mismos caudales que en ensayos anteriores.



Figura 6 Aleatoriedad en el inicio de rotura de la presa $D_{50}=16,49$ mm $N=2,2$ $H=1,00$ m

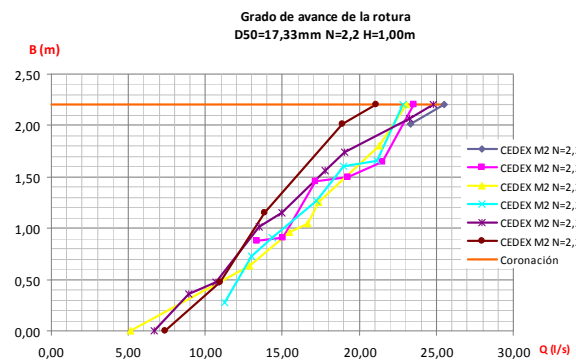


Figura 7 Aleatoriedad en el inicio de rotura de la presa $D_{50}=17,33$ mm $N=2,2$ $H=1,00$ m

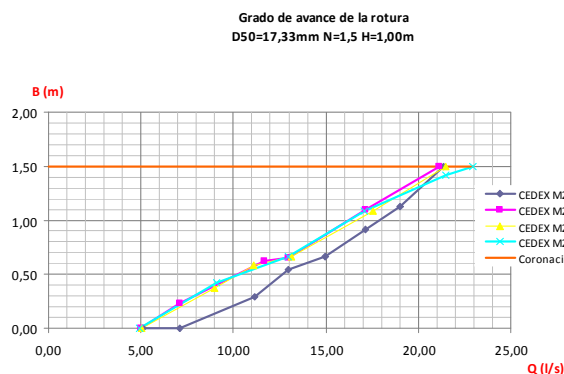


Figura 8 Aleatoriedad en el inicio de rotura de la presa $D_{50}=17,33$ mm $N=1,5$ $H=1,00$ m

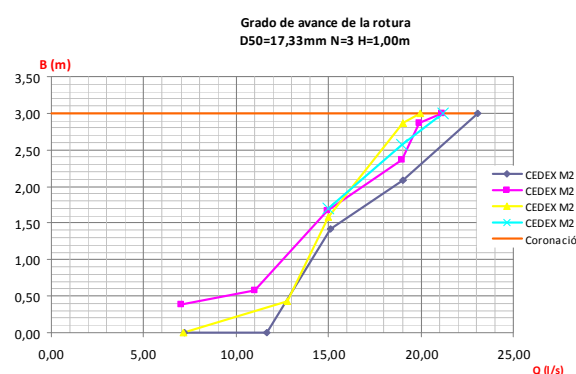


Figura 9 Aleatoriedad en el inicio de rotura de la presa $D_{50}=17,33$ mm $N=3,0$ $H=1,00$ m

Efecto escala

- Los resultados son alentadores. Se han comparado los resultados obtenidos en el ensayo que se ha considerado prototipo, con los que se han obtenido del modelo (aplicando un factor de escala 1:3,5), para tres taludes distintos ($N=1,5$; $2,5$ y $3,5$). A partir de los datos medidos en el modelo se han obtenido por semejanza los valores reales que deberían obtenerse en el prototipo y se han comparado con los obtenidos en el ensayo (ver Tabla 2). Como se puede observar, las diferencias son mínimas, salvo para los valores obtenidos en el talud $2,5$. Esta variación puede deberse a un error en la medida de caudal de rotura en el modelo. Sería necesario repetir el ensayo para corroborar esta hipótesis.
- Sería necesario comprobar si esta tendencia del efecto escala es general. Para ello habría que realizar nuevos ensayos. En este sentido, los ensayos que se realicen en el canal de grandes dimensiones (ver apartado 6) serán determinantes.

Tabla 2 Resultados obtenidos del análisis del efecto escala

	Talud 1,5	Talud 2,5	Talud 3,5
MODELO			
Altura de lámina de agua en rotura (cm)	2,04	1,80	2,30
Caudal unitario de rotura (q_{rm}) (l/s/m)	5,3	9,5	6,5
PROTOTIPO (ensayo)			
Altura de lámina de agua en rotura (h_{rpe}) (cm)	7,40	6,45	8,20
Caudal unitario de rotura (l/s/m)	36	46	45
PROTOTIPO (por semejanza)			
Altura de lámina de agua en rotura (cm)	7,15	6,30	8,40
Caudal unitario de rotura (l/s/m)	35	62	43

Caudal de rotura

- No parece existir una dependencia clara entre el Q_r y el talud de la presa (N). Sin embargo, existen varios casos en los que se observa que para taludes $N=2,2$ el valor del Q_r es menor que para taludes $N=1,5$ y $N=3,0$. Sería necesario comprobar si la tendencia es general. Se ha observado que en presas con núcleo impermeable los valores de Q_r son de un 10 a 20% menores que los obtenidos en presas sin el mismo y con lámina de impermeabilización para cualquier talud, aunque existen algunas excepciones. Esto puede ser debido a que, con menor caudal, la cota de la línea de saturación es mayor al haber menos volumen de espaldón que saturar en este tipo de presas (con núcleo) que en las otras tipologías.
- Parece existir una clara dependencia entre el Q_r y el D_{50} . A mayor de D_{50} , mayor Q_r (ver Figura 10). Es posible que Q_r dependa de la permeabilidad del material que conforma la presa, que a su vez, en materiales uniformes, depende del D_{50} de dicho material. Es decir, que la cota de la línea de saturación determine hasta dónde rompe la presa, independientemente del mecanismo de rotura.

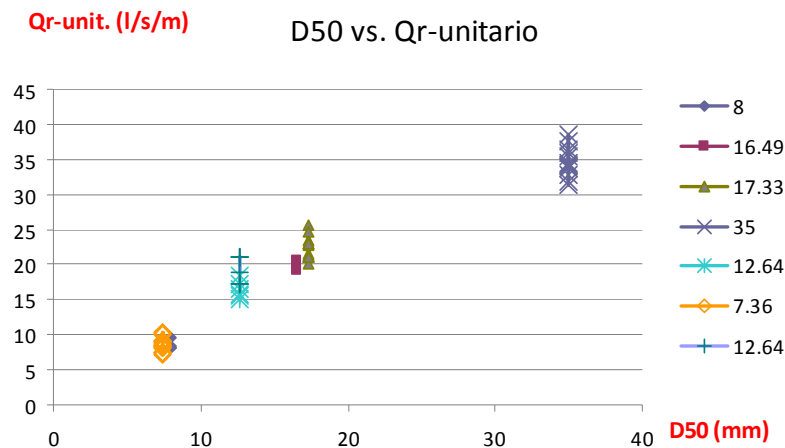


Figura 10 Relación entre el Q_r y el D_{50}

Evolución de la rotura

- Parece observarse una tendencia en el valor del caudal de incubación (Q_i). A mayor talud (pendientes más tendidas) mayor Q_i .
- Parece observarse una ligera tendencia a una mayor dispersión en el camino de rotura para talud 2,2 que para los taludes 1,5 y 3, para distintos tamaños de material. Esto podría suceder por la mezcla de mecanismos de rotura que se produce en los taludes intermedios.

6. TRABAJOS FUTUROS

Para conocer con mayor rigor la seguridad de las presas frente al sobrevertido sería necesario continuar con el estudio, para analizar, entre otros, los resultados obtenidos del canal de grandes dimensiones que se pretende construir en el Laboratorio de Hidráulica del Centro de Estudios Hidrográficos del CEDEX. Los ensayos en este gran canal en presas de hasta 4 m de altura permitirán obtener un conocimiento más preciso del efecto escala, determinante para la extrapolación de los datos obtenidos de los ensayos realizados en laboratorio a escala reducida respecto a la realidad.

También sería de gran utilidad realizar más ensayos en los canales existentes para afinar algunas de las conclusiones obtenidas. Se podrían, asimismo, planificar campañas de ensayos para estudiar la influencia de algunos parámetros que hasta ahora no se han tenido en cuenta, tales como:

- Compactación del material
- Hidrogramas de sobrevertido
- Materiales no uniformes

Se prevé estudiar en profundidad la distribución del campo de presiones en la solera durante los ensayos. Estas presiones han sido medidas en muchos de los ensayos, y habría que estudiar su relación con el comportamiento de la presa para cada escalón de caudal, así como en determinadas secciones del cuerpo de la presa.

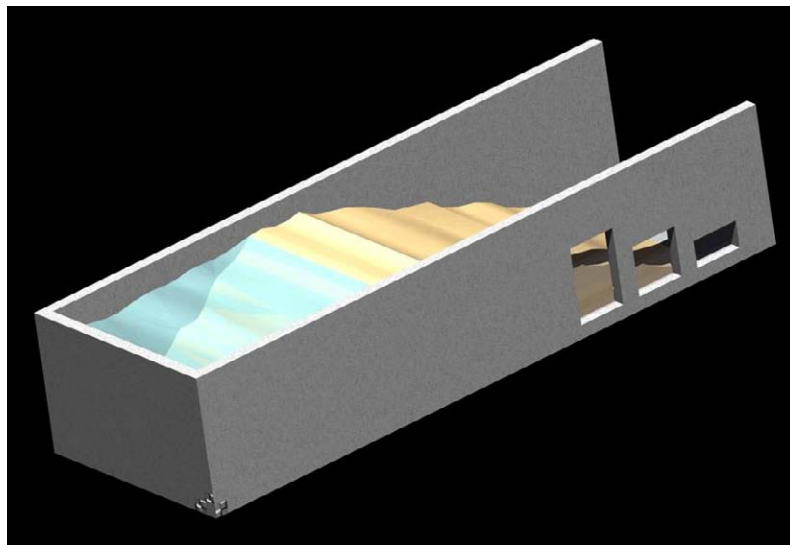


Figura 11 Esquema del canal de grandes dimensiones

Otros campos en los que se va a seguir trabajando son el diseño de protecciones eficaces frente al sobrevertido, el estudio de la rotura del elemento impermeable de la presa como elemento estructural de la misma, así como en el análisis en 3D del movimiento de la escollera.

BIBLIOGRAFÍA

- Toledo, M. A. (1997). "Presas de escollera sometidas a sobrevertido. Estudio del movimiento del agua a través de la escollera y de la estabilidad frente al deslizamiento en masa." Tesis Doctoral.
- Campos, H., García, J., Díez, A., Aguirre, J., Toledo, M.A. (2008). "Técnicas de ensayo de rotura de presas de escollera por sobrevertido". VIII Jornadas Españolas de Presas.
- Campos, H., Morán, R., García, J., Toledo, M.A. (2009). "Estudio del inicio y avance de la rotura en una presa de escollera debido al sobrevertido". II Seminario Plataforma Tecnológica de Laboratorios de Hidráulica de España.
- Lechuga, C., Toledo, M. A., Oñate, E. (2008). "Análisis del comportamiento de las presas de escollera ante un vertido por coronación". XXXIII Congreso Latinoamericano de Hidráulica.
- Toledo, M. A., Lechuga, C., Morán, R. (2008). "Investigación mediante modelo físico del comportamiento de las presas de escollera ante un vertido sobre coronación". VIII Jornadas Españolas de Presas.
- Lara, A.; Lechuga, C., Berga, M. I., Viña, M. P. (2009). "Análisis del comportamiento de presas de escollera ante un vertido por coronación". II Seminario Plataforma Tecnológica de Laboratorios de Hidráulica de España.
- Toledo, M. A.; Lechuga, C.; Campos, H.; Morán, R.; Berga, M. I.; Viña, M. P. (2009). "Caracterización de la rotura de presas de escollera por sobrevertido mediante la realización de ensayos en modelo físico". I Jornadas sobre Ingeniería del Agua.
- Larese, A., Rossi, R., Oñate, E., Idelsohn, S.R. (2008), Validation of the particle finite element method (PFEM) for simulation of free surface flows. Accepted for publication in Engineering Computations (paper n.1246).
- Oñate, E., Sacco, C. and Idelsohn, S.R. (2000). A finite point method for incompressible flow problems. *Comput. and Visual. in Science*, 2: 67-75.
- Oñate, E., Idelsohn, S.R. and Del Pin, F. (2003). Lagrangian formulation for incompressible fluids using finite calculus and the finite element method. in *Numerical Methods for Scientific Computing Variational Problems and Applications*, Y. Kuznetsov, P. Neittanmaki and O. Pironneau (Eds.), CIMNE, Barcelona.
- Idelsohn, S.R., Oñate, E., Calvo, N. and del Pin, F. (2003a). The meshless finite element method. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 58,6: 893-912.
- Idelsohn, S.R., Oñate, E. and Del Pin, F. (2003b). A lagrangian meshless finite element method applied to fluid-structure interaction problems. in *Computer and Structures*, 81: 655-671.
- Idelsohn, S.R., Calvo, N. and Oñate, E. (2003c). Polyhedrization of an arbitrary point set. *Comput. Method Appl. Mech. Engng.*, 192 (22-24): 2649-2668.
- Idelsohn, S.R., Oñate, E. and Del Pin, F. (2004). The particle finite element method a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, submitted.
- Oñate, E., Idelsohn S.R., Del Pin F. and Aubry R. (2004). The particle finite element method. An overview. *International Journal of Computational Methods*, 1 (2), 267-307.
- Oñate, E., Zárate, F. and Idelsohn, S.R. (2007). Finite element formulation for convective-diffusive problems with sharp gradients using finite calculus. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 195 (13-16), 1793-1825.
- Oñate E., García J., Idelsohn S. R., and Del Pin F. (2006b). Finite calculus formulations for finite element analysis of incompressible flows. Eulerian, ALE and Lagrangian approaches. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 195, pp. 3001-3037.
- Oñate, E., Idelsohn, S.R., Celigueta, M.A., Rossi, R. (2006c). Advances in the finite element method for fluid-structure interaction problems. *Comput Meth Appl. Mech. Engng.* Submitted October 2006.
- Oñate E., Celigueta M.A. and Idelsohn S.R. (2006d). Modeling bed erosion in free surface flows by the particle finite element method. *Acta Geotechnica*, Submitted October 2006.
- Idelsohn S. R., Oñate E., Del Pin F. y Calvo N. (2006). Fluid-structure interaction using the particle finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, pp. 2100-2123
- Oñate, E., Idelsohn, S.R., Celigueta, M.A., Rossi, R. (2008). Advances in the particle finite element method for the analysis of fluid-multibody interaction and bed erosion in free surface flows. *Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 197, 1777-1800.
- Oñate, E. and García, J. (2001). A finite element method for fluid-structure interaction with surface waves using a finite calculus formulation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 191: 635-660.
- R. Elias y A. L. G. A. Coutinho (2007). Stabilized edge-based Finite element simulation of free-surface flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 54(6-8):965-993.